PARTIE I

1.– Soit n un entier positif ou nul. On pose, pour tout $x \in [\,0\,,\,1\,]$:

$$P_n(x) = \cos n(\mathrm{Arccos}\, x)$$

Démontrer que pour tout $n > 0$ on a la relation:

$$P_{n+1}(x) = 2xP_n(x) - P_{n-1}(x)$$

En déduire que P_n est un polynôme dont on précisera le degré et le coefficient du terme de plus haut degré.
Calculer les polynômes P_1, P_2, P_3 et P_4. Déterminer leurs racines.
Etudier la parité des polynômes P_n.
Calculer $P_n(1)$, $P_n(-1)$ et $P_n(0)$ pour tout entier $n \geq 0$.

2.– On veut démontrer que pour tout $n \geq 1$, le polynôme P_n possède n racines distinctes toutes situées dans l'intervalle ouvert $]\,-1\,,\,+1\,[$ et que ces racines séparent les $n+1$ racines distinctes de P_{n+1}.

a) Formuler une hypothèse de récurrence convenable sur les racines de P_n et P_{n-1}. On désigne par $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1})$ les racines de P_{n-1} et $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ celles de P_n, toutes ces racines étant rangées dans l'ordre croissant.
Comparer les signes de $P_{n+1}(1)$ et $P_{n+1}(\beta_n)$. Conclure sur l'existence d'au moins une racine de P_{n+1} entre β_n et 1.

b) Conclure de manière analogue entre (-1) et β_1, puis entre deux racines consécutives β_i et β_{i+1} de P_n.

c) Terminer la récurrence.

PARTIE II

1.– Soient m et n deux entiers distincts ou non. A l'aide de la question **I.1.–**, calculer les intégrales:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{P_m(x)P_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

où l'intégrale impropre ci-dessus est définie par

$$\int_{-1}^{+1} \frac{P_m(x)P_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{(X \to -1^+\,;\, Y \to 1^-)} \int_X^Y \frac{P_m(x)P_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Faire le changement de variable $x = \cos\varphi$.

2.– Soit N un entier et soit E_N l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à N. Que peut-on dire des polynômes $(P_n)_{0\leq n\leq N}$ relativement à l'espace vectoriel E_N. Soit k un entier supérieur strictement à N. Démontrer

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x^N P_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 0$$

2.– Vérifier que P_n satisfait à l'équation différentielle

$$(x^2-1)y'' + xy' - n^2 y = 0$$

3.– Soit U l'application de l'espace E_N définie par

$$U(Q) = (x^2-1)Q'' + xQ' \qquad \forall Q \in E_N$$

où Q' et Q'' désignent les polynômes dérivées première et seconde du polynôme Q. Vérifier que l'application U est linéaire de l'espace vectoriel E_N dans lui-même. Démontrer que U est diagonalisable et exprimer une base de vecteurs propres.

****

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail